به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۳

استقلال خطی، بعد و مرتبه، فضای ضرب داخلی | **تمرین تئوری دوم** | تاریخ انتشار: ۶ فروردین ۱۴۰۳

---

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

پرسش ۱ (۲۵ نمره) درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید. اگر فکر می‌کنید گزاره‌ای درست است، آن را اثبات کنید و در غیر این صورت برای آن مثال نقض بیاورید.

آ) فرض کنید بردارهای $u_۱$، $u_۲$، ...، u_n مستقل خطی‌اند. n جایگشت متمایز از اعداد ۱ تا n را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را $\sigma_۱, \sigma_۲, ..., \sigma_n$ می‌نامیم. ماتریس‌های A و B را به صورت زیر در نظر گرفته و ماتریس C را به صورت $C = AB$ تعریف می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} — & \sigma_۱^T & — \\ — & \sigma_۲^T & — \\ & \vdots & \\ — & \sigma_n^T & — \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} — & u_۱^T & — \\ — & u_۲^T & — \\ & \vdots & \\ — & u_n^T & — \end{bmatrix}$$

سطرهای ماتریس C مستقل خطی هستند.

ب) فرض کنید $W = \{(x_۱, x_۲, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ یک فضای برداری روی F باشد. $w_۱, w_۲, ..., w_{n+۱}$ بردارهایی متمایز در W هستند که W را اسپن می‌کنند. اگر $w_۱ + w_۲ + ...w_{n+۱} = \vec{0}$ ، آن گاه بردار های $w_۱, w_۲, ..., w_n$ مستقل خطی هستند.

پاسخ آ) نادرست است.

مثال نقض:

$$n = ۴$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B = I_۴$$

در این صورت داریم:

$$C = AB = AI = A$$

$$۲\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

بنابراین سطرهای A و در نتیجه سطرهای C وابسته خطی‌اند.

ب) درست است.

$$w_۱ + w_۲ + ... + w_{n+۱} = \vec{0}$$

$$\rightarrow w_{n+۱} = -w_۱ - w_۲ - ... - w_n$$

$$S_۱ = \{w_۱, w_۲, ..., w_{n+۱}\}$$

$$S_۲ = \{w_۱, w_۲, ..., w_n\}$$

ابتدا اثبات می‌کنیم $Span(S۱)$ زیرمجموعه $Span(S۲)$ است. داریم:

$$s \in Span(S_۱) \Rightarrow s = c_۱w_۱ + c_۲w_۲ + ... + c_nw_n + c_{n+۱}w_{n+۱} \Rightarrow s = c_۱w_۱ + c_۲w_۲ + ... + c_nw_n + c_{n+۱}(-w_۱ - w_۲ - ... - w_n)$$

$$\Rightarrow s = (c_۱ - c_{n+۱})w_۱ + (c_۲ - c_{n+۱})w_۲ + ... + (c_n - c_{n+۱})w_n \Rightarrow s \in Span(S_۲) \Rightarrow Span(S_۱) \subseteq Span(S_۲)$$

چون W توسط $S_۱$ اسپن می‌شود، پس $S_۲$ نیز W را اسپن می‌کند. از طرفی تعداد اعضای $S_۲$ با بعد W برابر است. بنابراین $S_۲$ یک پایه برای W است و در نتیجه اعضای آن مستقل خطی‌اند.

پرسش ۲ (۲۵ نمره) فرض کنید $V = P_n(\mathbb{R})$ فضای برداری چندجمله‌ای های دارای ضرایب حقیقی با حداکثر درجه n باشد. اگر $q(x)$ یک چندجمله‌ای عضو V با درجه n باشد، اثبات کنید مجموعه $S = \{q(x), q'(x), q''(x), ..., q^{(n)}(x)\}$ یک پایه برای V است.

پاسخ شرط Linear Independence و Spanning را برای اعضای S بررسی می‌کنیم.

برای استقلال خطی، باید اثبات کنیم که اگر یک ترکیب خطی از اعضای S برابر $\vec{0}$ باشد، ضریب همه اعضا ۰ است.

$$c_۰ q(x) + c_۱ q'(x) + ... + c_n q^{(n)}(x) = ۰ \tag{۱}$$

از طرفین معادله (۱)، n بار نسبت به x مشتق می‌گیریم. q(x) یک چندجمله‌ای درجه n است. پس مشتق n ام $q(x), q'(x), ..., q^{(n)}(x)$ برابر ۰ و مشتق n ام $q(x)$ برابر با یک عدد ثابت غیر صفر می‌شود. پس:

$$c_۰ * (some\ non-zero\ number) = ۰ \rightarrow c_۰ = ۰$$

با جایگذاری $c_۰$ به دست آمده در معادله (۱) به معادله زیر می‌رسیم.

$$c_۱ q'(x) + ... + c_n q^{(n)}(x) = ۰ \tag{۲}$$

با $(n-۱)$ بار مشتق‌گیری از طرفین معادله (۲) و با استدلالی مشابه قبل، نتیجه می‌گیریم که $c_۱ = ۰$

با تکرار این عمل می‌توان نتیجه گرفت که $c_۰ = c_۱ = c_۲ = ... = c_n = ۰$. بنابراین اعضای S مستقل خطی هستند.

حال به بررسی خاصیت Spanning برای اعضای S می‌پردازیم. می‌دانیم $dim(V) = n + ۱$. از طرفی در قسمت قبل اثبات کردیم که چندجمله‌ای های $q(x), q'(x), ..., q^(n)(x)$ مستقل خطی‌اند. تعداد این چندجمله‌ای ها $(n + ۱) = dim(V)$ است. بنابراین مجموعه S، V را اسپن می‌کند و یک پایه برای آن است.

پرسش ۳ (۳۰ نمره) ماتریس $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ یک ماتریس متقارن است اگر داشته باشیم:

$$\forall\ ۱ \leq i < j \leq n\ ;\ A_{ij} = A_{ji}$$

زیر فضایی از $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ که شامل تمامی ماتریس های متقارن می باشد را با $M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$ نشان می دهیم. یک پایه برای $M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$ بیابید و بعد آن را مشخص کنید.

پاسخ در ابتدا برای سادگی، درایه واقع در تقاطع سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را با $e(A, i, j)$ نمایش می دهیم. ماتریس E_{ab} را برای $۱ \leq a \leq b \leq n$ به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$e(E_{ab}, i, j) = \begin{cases} ۱ & (i = a\ \wedge\ j = b)\ \vee\ (i = b\ \wedge\ j = a) \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال مجموعه $E = \{E_{ab} \mid ۱ \leq a \leq b \leq n\}$ را در نظر بگیرید. نشان می دهیم این مجموعه یک پایه برای $M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$ می باشد.

در ابتدا نشان می دهیم که E مستقل خطی است. برای این منظور یک ترکیب خطی دلخواه با حاصل صفر از اعضای E را در نظر بگیرید. داریم:

$$\sum_{۱\leq a\leq b\leq n} \alpha_{ab}E_{ab} = O_{n\times n} \Longrightarrow \forall ۱ \leq i, j \leq n\ ;\ e(\sum_{۱\leq a\leq b\leq n} \alpha_{ab}E_{ab}, i, j) = e(O_{n\times n}, i, j) = ۰ \Longrightarrow \forall ۱ \leq a \leq b \leq n\ ;\ \alpha_{ab} = ۰$$

پس در هر ترکیب خطی از اعضای E که حاصل آن صفر است، همه ضرایب باید برابر صفر باشند که این استقلال خطی E را نتیجه می دهد.

در ادامه نشان می دهیم که این مجموعه، $M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$ را اسپن می کند. فرض کنید A یک عضو دلخواه متعلق به $M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$ باشد، با توجه به تعریف داده شده برای A می توان نوشت:

$$\forall ۱ \leq a \leq b \leq n\ ;\ e(A, a, b) = e(A, a, b) \Longrightarrow A = \sum_{۱\leq a\leq b\leq n} e(A, a, b)E_{ab}$$

در نتیجه می توان A را به صورت یک ترکیب خطی از اعضای E نمایش داد که درستی حکم را نتیجه می دهد.

بنابراین مجموعه E یک مجموعه مستقل خطی است که $M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$ را اسپن می کند و در نتیجه یک پایه برای این زیر فضا می باشد.

در نهایت برای به دست آوردن بعد این زیرفضا، کافی است تعداد اعضای مجموعه E را به دست بیاوریم. این تعداد برابر است با تعداد زوج مرتب های (a, b) به طوری که $۱ \leq a \leq b \leq n$ باشد. در نتیجه داریم:

$$dim(M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})) = \frac{n(n-۱)}{۲} + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

پرسش ۴ (۲۰ نمره) اثبات یا نقض کنید:

الف) تابعی که به عنوان ورودی $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ را می گیرد و خروجی آن $|x_1y_1| + |x_2y_2|$ است یک ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ است.

ب) تابعی که به عنوان ورودی $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ را می گیرد و خروجی آن $x_1y_1 + x_3y_3$ است یک ضرب داخلی در $\mathbb{R}^3$ است.

ج) تابعی که به عنوان ورودی $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ را می گیرد و خروجی آن $x_1y_1 + x_2y_2$ است یک ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ است.

د) برای $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ تعریف می‌کنیم $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$ ثابت کنید که این تعریف یک تابع ضرب داخلی است.

پاسخ الف) میدانیم برای هر ضرب داخلی داریم: $< cw, u >= c < w, u >$

مثال نقض: $c = -1$ ، $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 1$

$$< w, u >= |x_1y_1| + |x_2y_2| = 2$$

$$c < w, u >= -2 \neq < cw, u >= 2$$

در نتیجه ضرب داخلی نیست.

ب) میدانیم برای هر ضرب داخلی داریم: $v = 0 \longleftrightarrow < v, v >= 0$

مثال نقض: $x_2 = 1$ ، $x_1 = x_3 = 0$

$$< v, v >= 0$$

$$v \neq 0$$

در نتیجه ضرب داخلی نیست.

ج) باید همه ویژگی های ضرب داخلی را اثبات کنیم:

ویژگی اول: $v = 0 \longleftrightarrow < v, v >= 0$

$$v = 0 \Longrightarrow < v, v >= v_1^2 + v_2^2 = 0$$

$$< v, v >= 0 \Longrightarrow v_1^2 + v_2^2 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2 = 0 \Longrightarrow v = 0$$

ویژگی دوم: $< v, w >=< w, v >$

$$< v, w >= v_1w_1 + v_2w_2 = w_1v_1 + w_2v_2 =< w, v >$$

ویژگی سوم: $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$

$$< u + v, w >= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 = u_1w_1 + u_2w_2 + v_1w_1 + v_2w_2 =< u, w > + < v, w >$$

ویژگی چهارم: $< cv, w >= c < v, w >$

$$< cv, w >= cv_1w_1 + cv_2w_2 = c(v_1w_1 + v_2w_2) = c < v, w >$$

ویژگی پنجم: $< v, v >\geq 0$

$$< v, v >= v_1^2 + v_2^2 \geq 0$$

د) باید ویژگی های ضرب داخلی را اثبات کنیم:

ویژگی اول: $< A + B, C >= tr(C^T(A + B)) = tr(C^T A) + tr(C^T B) =< A, C > + < B, C >$

ویژگی دوم: $< A, B >= tr(B^T A) = tr((B^T A)^T) = tr(A^T B) =< B, A >$

ویژگی سوم:

اگر $A = [a_{ij}]$ باشد، آنگاه

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}(A^T A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\langle A, A\rangle > 0, \quad \text{و} A \neq 0.$$